2次元ランダムポテンシャルの伝導率

ランダウ研究所　　エー・アイ・ラーキン*)

金属の伝導度は次の式で表わされる。

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m}$$

これは古典的な表式であるが，電子の波長 $\hbar/p$ が平均自由行程 l より短かい場合

$$pl \gg \hbar, \text{ 又は } E\tau \gg \hbar$$

に正しい表式である。

アンダーソン局在模型のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} V_{ij} a_i^+ a_j + \sum_i U_i a_i^+ a_i$$

と書かれ，U_i はランダムなポテンシャルを表わす。古典的な場合は $V \gg U$ で，もし $V \lesssim U$ となると，他の違った原子の散乱の量子的干渉が重要となり，局在につながる。局在すると，電子は動かなくて，伝導度は零になる。3次元では $V \sim U$ のとき易動度端があらわれる。1次元もしくは2次元では，量子的干渉が重要となり散乱が小さくても電気伝導はない。この理由は次のようにいうことも出来るかもしれない。

もし人が1次元又は2次元の森の中をさまよい歩いても元の所に帰ってこれるが，もし3次元の森を歩くことになれば，もはや元に帰ってくるのは不可能である。

さて，この電気伝導の局在の問題を考えるにはくり込み群（R. G.）の方法に依るのが便利である。結合定数はこの場合抵抗Rで，$h/e^2 = 4K\Omega = 1$ と置こう。くりこみ群の方程式は次のように書ける。

$$\frac{dR}{d \ln L} = f(R)$$

ここでLはd次元の立方体の一辺の大きさとする。f(R)はゲルマン・ロー函数であるが，

---

*) A. I. Larkin, L. D. Landau Institute for Theoretical Physics; 1979年10月基研に滞在。この稿は基研でのセミナーによる。（文責　氷上 忍）

この関数の性質は次のようにいえる。

Rが小さい場合，金属の伝導度が得られオームの法則（ S は平方面積 ）

$$R = L/S\sigma$$

が成立つ。大きさLのd次元の立方では

$$S = L^{d-1}, \quad R \sim L^{2-d}$$

従って

$$f(R) = (2-d)R \qquad R \ll 1$$

逆にRが大きい時.（ $R \gg 1$ ）局在が起こる。その場合には抵抗Rは（ $-L$ ）に指数関数的に依って

$$R \sim e^{-\alpha L}$$

これより

$$f(R) = R \ln R \qquad (R \gg 1)$$

となる。これらの漸近的な振舞いを図示する。

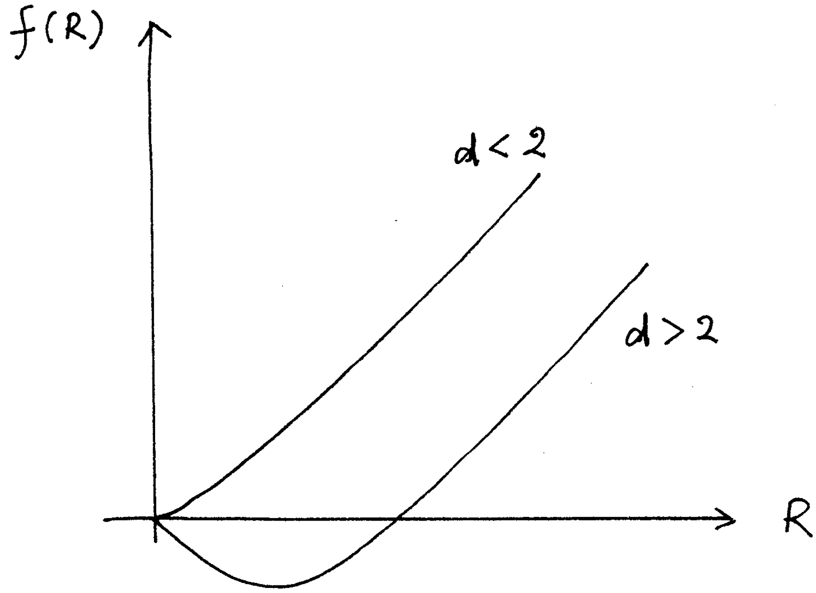


図　　1

2次元ではRが小さい時，次のように計算される。[1]

$$f(R) = AR^2 + BR^3 + 0(R^4) \qquad A = \frac{1}{\pi^2}, \quad B = 0$$

従って，2次元もしくは2次元以下ではR＝0が不安定点で，くりこみ群の式よりR→∞になり，電気伝導がないことになる。2次元より大きい次元ではf(R)が零点（易動度端）を持つ。これが主な結論であるが，もう少し詳しく議論することにしよう。

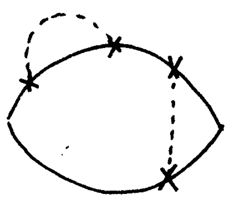
伝導度は一般に次のように表わされる。

$$\sigma = e^2 \int dE \, \nu(E) \frac{n_E - n_{E+\omega}}{\omega} D(\omega)$$

$$D(\omega) = \frac{1}{d} \int dr < v(o) G^R_{E+\omega}(o, r) v(r) G^A_E(r, o) >$$

$$(E - p^2 - u(r) \pm i\delta) G^{R,A} = \delta(r)$$

uはランダム・ポテンシャル。摂動論で考えると次のようなダイアグラムが表われる。



$\times \cdots \times = <u^2>$

図　2

もし，点線が交差しないダイアグラムをたしあげると，ドゥルーデの公式（前述）

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{e^2 n}{m} \tau \qquad \text{（右図）}$$

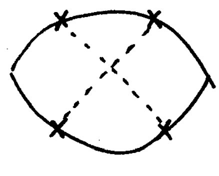


図　3

が得られる。交差するダイアグラムは量子補正を与え，$\sigma_0 \hbar / E\tau$のオーダである。

さて，この量子補正を系統的に取り扱う事を考える。図4のようなシリーズを考える。これははしごダイアグラムと見ることが出来る。

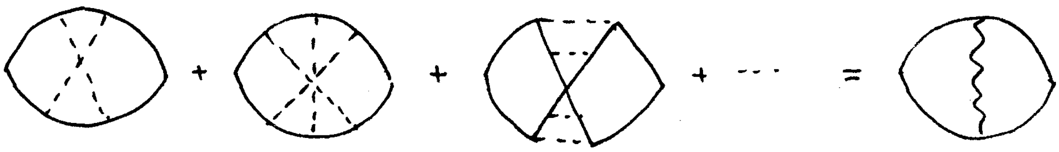


図　　4(a)

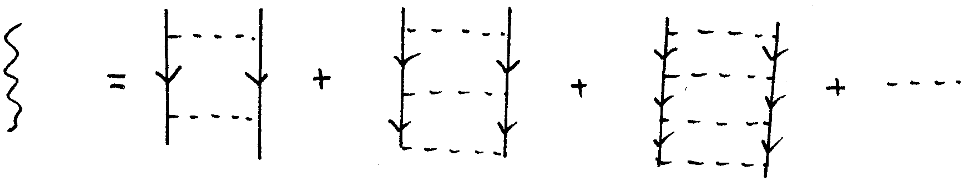


図　　4(b)

このはしごを波線で書き，$c(q,\omega)$と表わすと，

$$c(q,\omega)=\frac{1}{\tau^2}\frac{1}{Dq^2-i\omega}-\frac{1}{\tau}$$

となってこの粒子対のポールが密度相関関数の拡散のポールと同じになる。

$$\langle\rho\rho\rangle\sim\frac{1}{Dq^2-i\omega}$$

このはしごダイアグラムを取り入れることにより，次のような量子補正が計算される。

$$D=D_0\left\{1-\frac{\pi}{2\,SmE}\sqrt{\sigma\omega\tau}\right\}\qquad(d=1)$$

$$D=D_0\left\{1-\frac{\hbar}{2\pi E\tau}\ln\frac{1}{\omega\tau}\right\}\qquad(d=2)$$

$$D=D_0\left\{1+\frac{3\hbar^2}{16}\frac{\sqrt{\sigma\omega\tau}}{(E\tau)^2}\right\}\qquad(d=3)$$

1次元の場合は断面積Sを持った導線に相当する。振動数依存性は系の大きさLの依存性に変換することが出きる。

$$\omega\to DL^{-2}$$

さて，上の式からわかるように2次元の場合がもっとも興味がある。第一次の補正でlog項が出て来たので，高次の項がくりこみ群の予想に合致するかどうかということで

ある。

次に2次の補正項を調べてみる。図5に2次のダイアグラムを書く。

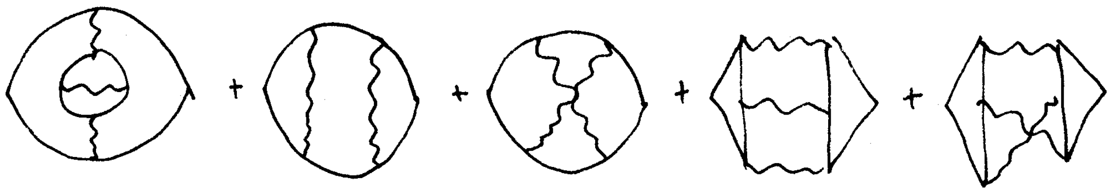


図　　5

計算してみると $\left(\frac{1}{E\tau}\log\right)^2$ の項は打ち消し合うことがわかる。これはくりこみ群の予想と合致している。従って最近アブラハム・アンダーソン・リキャルデロ・ラマクリシュナンのくりこみ群の議論[2]と一致する。我々はさらに2次の log 項の係数に興味があるが，これを計算すると零となる。これはウェグナー[3]が示した同値の模型のくりこみ群の計算と一致する。[5]

くりこみ群の方程式は結局

$$\frac{dR}{d\log\frac{1}{\omega\tau}} = \beta(R) = \frac{R^2}{2\pi} + BR^3 + O(R^4)$$

$$B = 0$$

となる。これを解くと

$$\frac{R_0}{R} = 1 - \frac{R_0}{2\pi}\log\frac{1}{\omega\tau} - BR_0^2\log\frac{1}{\omega\tau}$$

である。我々はこの議論では厳密なくりこみ群の証明を与えることが出来ないがくりこみ群が適用出来ると信じることが出来る。

次に物理的内容を考える。もし βー函数が零点をもたなければどんなに不純物が少なくてもアンダーソン局在が起こる。逆に零点があれば，不純物濃度が小さいとき，普遍的な抵抗 $R \to \widetilde{R}$ を与える。

2次元以上（ $d > 2$ ）では，易動度端 E_c が存在して，伝導度はそこで，

$$\sigma \simeq (E - E_c)^{\nu}$$

の形を取り，指数νは2次元から摂動展開されて，

$$\nu = 1 - B(d-2) + O[(d-2)^2]$$

となる。Bは前にも出て来たが，零と計算される。

今までは絶対零度を考えたが，次に低温の場合を考えてみる。その場合非弾性散乱があり，前述のωを$1/\tau_\varepsilon$に置き換える，つまり

$$\log\frac{1}{\omega\tau} \to \log\frac{\tau_\varepsilon}{\tau}$$

ここでτ_εはエネルギーの緩和時間である。

粒子対の極を考えたが，これは対称性$\phi \to \phi^*$，$p \to -p$と関連している。磁性不純物はこの対称性を破る。P. Lee[4]がこの問題を考えて，粒子対の極がωでカットオフされ，τ_Sをスピンフリップの時間とするとωが$1/\tau_S$のオーダーになることを調べた。

次に磁場がある場合を考えてみると，グリーン函数は位相として

$$\exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\int^{r} A\,dr'\right\}$$

の因子を持ち，これが拡散モードを打ち消す。前述の粒子対の$C(q,\omega)$は次の式を満たす。

$$\left\{D\left(\vec{q} - \frac{2e}{c\hbar}\vec{A}\right)^2 - i\omega\right\}C = 1$$

伝導度に対する磁場による補正はランダムレベルの和に比例する。

$$\frac{4eH}{\hbar c}\sum_{n=0}^{n_0}\frac{1}{\frac{4DeH}{\hbar c}\left(n+\frac{1}{2}\right) - i\omega} \sim \log\frac{1}{\tau\max\left(\omega, \frac{DeH}{\hbar c}\right)}$$

もし磁場が非常に強い時($eHD\tau_\varepsilon/\hbar c > 1$)，この和は$\omega$と$\tau_\varepsilon$には依存しない。

磁気抵抗[5]は次のようになる。

$$\Delta R_\square = R_0^2\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left[\ln\frac{4DeH\tau_\varepsilon}{\hbar c} - \phi\left(\frac{1}{2} + \frac{\hbar c}{4DeH\tau_\varepsilon}\right)\right]$$

ここで，$e^2/2\pi^2\hbar = 1.2\times 10^{-5}\Omega^{-1}$。$\tau_\varepsilon$は電子ー音子又は電子ー電子の相互作用が強いときに$\hbar\Theta_D/T^3$か$E/T^2$にそれぞれ比例する磁場が小さい場合は

$$\Delta\sigma = \frac{e^2}{48\pi^2\hbar}\left(\frac{4DeH\tau_\varepsilon}{\hbar c}\right)^2$$

磁場が大きい場合は

$$\Delta\sigma = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\ln\frac{4DeH\tau_\varepsilon}{\hbar c}$$

となり， log的に磁場と温度に依存することになる。最近の川口，川路[6] のMOS での負磁気抵抗の観測はこれにだいたいあっているが， log の係数が普遍的な $e^2/2\pi^2\hbar$ より半分程小さくなっている。スピン軌道が強い場合はこの係数に $-1/2$ の因子が現われ，磁気散乱が強い場合には零となることがわかるので実験の因子1/2 の違いはクロス・オーバーによると思われる。[5]

参 考 文 献

1) L. P. Gorkov, A. I. Larkin and D. E. Khmelnitzkii JETP Letters **30** (1979) 248.

2) E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan Phys. Rev. Letters **42** (1979) 673.

3) F. Wegner, Zeitschrift für Physik **B35** (1979) 207.

4) P. Lee, Report of 8th International Conference on Amorphous and Liquid Semiconductors, 1979.

5) S. Hikami, A. I. Larkin and Y. Nagaoka RIFP–387 preprint 1979.

6) Y. Kawaguchi and S. Kawaji, unpublished work and private communication.